

**Коммунальное государственное учреждение
«Средняя школа № 26» акимата г. Усть-Каменогорска**

**Сборник задач
«Обучение учащихся элементам
теории вероятностей
при подготовке к сдаче ЕНТ»**

2017-2018 учебный год

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития общества, когда в нашу жизнь стремительно вошли референдумы и социологические опросы, кредиты и страховые полисы, разнообразные банковские начисления и т.п., становится очевидным интерес изучения элементов теории вероятностей, которая предполагает предварительное знакомство с комбинаторикой.

Актуальность работы: в обыденной жизни нам нередко встречаются задачи, которые имеют несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор всех возможных вариантов или подсчитывать их число.

Поэтому весьма актуальным является формирование и развитие таких качеств мышления, как аналитичность, системность, гибкость, многовариантность, избирательность. Все эти качества характеризуют комбинаторный стиль мышления.

К задачам, которые требуют в своем решении участия логического мышления, а также задачи, наиболее приближенные к жизненным, относят задачи на комбинаторику и вероятность.

Таблица, показывающая объем материала по теории вероятностей и математической статистике в курсе математики с 8-го по 11-ый класс

8класс	9 класс	10 класс	11 класс.
5 часов	6 часов	6 часов	6 часов
Глава 5.	Глава 4.	Глава 6.	Глава 5.
17 пункт. Теория вероятности и математическая статистика.	1 пункт. Пространство элементарных событий. Операции над событиями.	21 пункт. Основные элементы комбинаторики.	24 пункт. Сложение и умножение вероятностей.
События. Случайные события. Достоверные события. Возможные события Маловероятные события. Невозможные события. Совместные события. Несовместные события. Вероятность события. Формула вычисления классической вероятности	Элементарное событие. Совместные события. Несовместные события. Противоположное событие. Зависимые события. Независимые события. Сумма событий. Произведение событий. Разность событий.	Размещения. Перестановки. Сочетания. Факториал. Формулы.	Совместные события. Несовместные события. Противоположное событие. Зависимые события. Независимые события. Сумма событий. Произведение событий. Разность событий.

18 пункт. Группировка и анализ статистических данных	2 пункт. Вероятность события и действия над вероятностями.	22 пункт. Формула бинома Ньютона. Биномиальный коэффициент	
Среднее арифметическое. Мода. Медиана. Математическая статистика. Статистические данные. Частота события. Таблица частоты	Правило сложения вероятностей несовместимых событий. Обобщенное правило сложения вероятностей любых событий. Правило произведения независимых событий. Обобщенное правило произведения любых событий	Формула бинома Ньютона. Биномиальный коэффициент	Правило сложения вероятностей несовместимых событий. Обобщенное правило сложения вероятностей любых событий. Правило произведения независимых событий. Обобщенное правило произведения любых событий.
	3 пункт. Геометрическая вероятность	23 пункт. Применение элементов комбинаторики и бинома Ньютона в теории вероятностей. Теорема Бернулли.	25 пункт. Случайная величина. Элементы выборочного метода.
	Формула определения геометрической вероятности.	Формула Бернулли.	Случайная величина. Дискретная величина. Закон распределения. Математическое ожидание. Среднеквадратическое отклонение. Дисперсия.
	4 пункт. Элементы комбинаторики.		
	Размещения. Перестановки. Сочетания. Формулы.		
	Табличный способ решения.		
	Решение с помощью «дерева анализа».		

	5 пункт. Применение формул комбинаторики К подсчету вероятностей.		
	6 пункт. Статистические характеристики.		
	Случайная величина. Генеральная совокупность. Выборка. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Отклонение случайной величины.		

Глава 1 Основные действия комбинаторики.

Если из данного множества предметов мы будем выбирать некоторое подмножество, то его будем называть выборкой. Выборки бывают упорядоченные и неупорядоченные. В упорядоченной выборке существенен порядок, в котором следуют ее элементы, другими словами, изменив порядок элементов, мы получим другую выборку.

Например, из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляем трехзначные числа 123, 431, 524 и т.д. Это упорядоченные трехэлементные выборки, ведь 123 и 132 — разные числа. Другой пример: из 20 учащихся класса будем выбирать двух дежурных. Любая пара дежурных представляет собой неупорядоченную двухэлементную выборку, так как порядок их выбора не важен, поэтому фразы дежурят Иванов и Петров или дежурят Петров и Иванов означают одно и то же. Но в то же время назначить Иванова капитаном команды, а Петрова его заместителем уже упорядочивает их должности, соответственно зарплату и фамилии их теперь просто так местами не поменяешь.

1. Размещения

Определение: размещениями из n элементов по m ($m \leq n$) называются упорядоченные m -элементные выборки из данных n элементов.

Из определения следует, что размещения отличаются друг от друга либо самими элементами, либо их порядком, т.е. существенен порядок, в котором следуют ее элементы. Число размещений из n по m обозначается — A_n^m .

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ — формула для вычисления числа размещений.

Размещение с повторением: $A_n^k = n^k$

2. Сочетания

Определение: Сочетаниями из n элементов по m ($m \leq n$) называются неупорядоченные m -элементные выборки из данных n элементов.

Ясно, что все сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, а порядок элементов здесь не существен. Число сочетаний из n по m обозначается — C_n^m соответствующая формула для вычисления числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad C_n^1 = n \quad C_n^0 = 1$$

Сочетания с повторением $C_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*k!}$

3. Перестановки

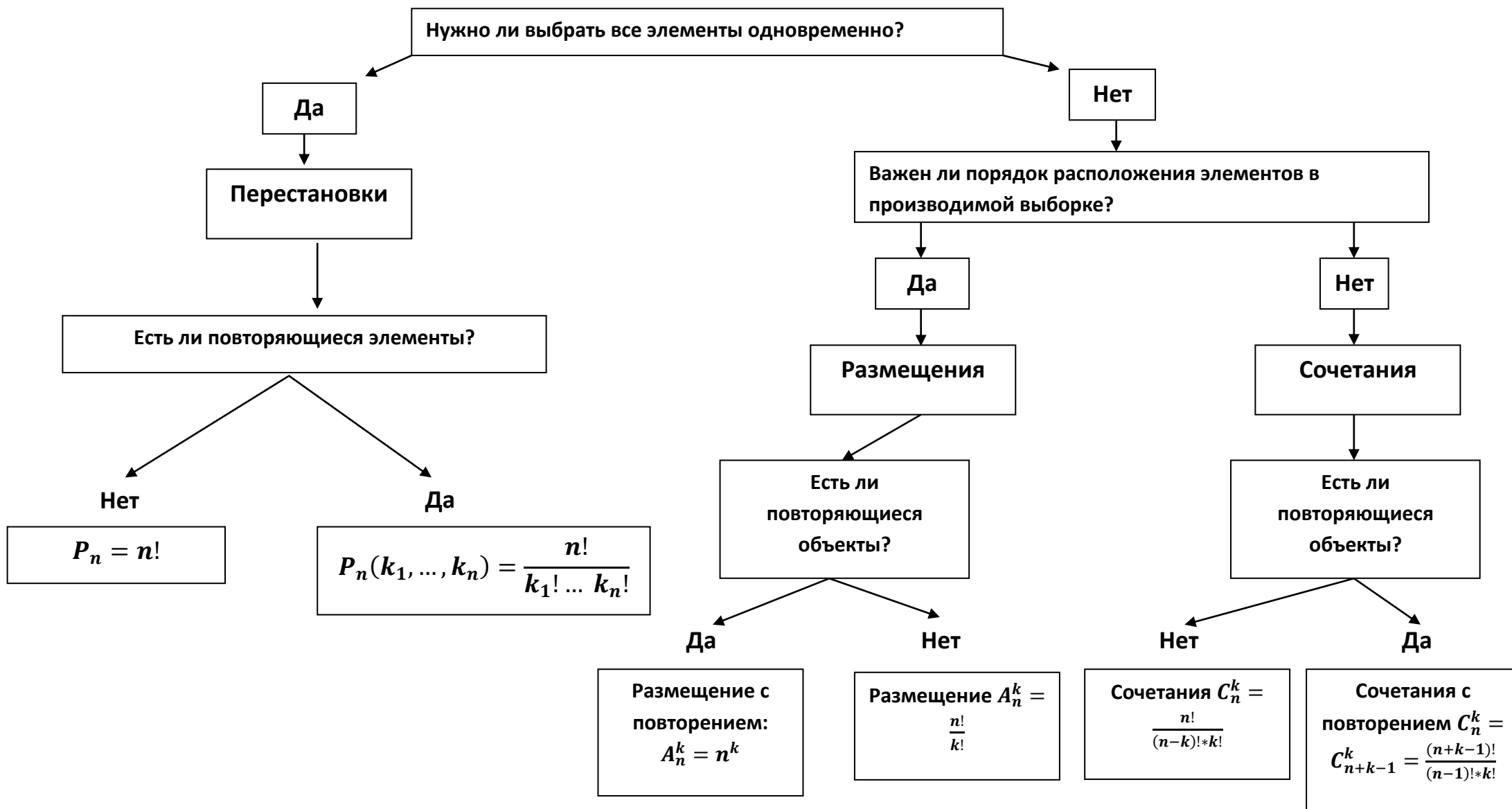
Определение: перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n .

Из определения следует, что в данном случае в упорядоченную выборку входят все n элементов и отличаться выборки могут только порядком. Поэтому все перестановки имеют один и тот же состав и отличаются только порядком элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n . Получим формулу для вычисления числа перестановок из n элементов: $P_n = n!$ ($m = n$)

$P_n(k_1, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$ формулу для вычисления числа перестановок из n элементов с повторением

При решении задач, в которых нужно отвечать на вопросы типа: «Сколькими способами...?», «Сколько существует вариантов...?», «Сколько различных слов...?», «Сколько существует трехзначных чисел...?» и т.д., для начала нужно разобраться, о каких понятиях комбинаторики идет речь: перестановки, размещения, сочетания. Каким образом это сделать? Приведем в систему полученные формулы, представив алгоритм определения вида комбинации следующей схемой.

Схема анализа текста задачи для выбора вида действий и формулы.



В умении решать задачи по комбинаторике, выбор подходящей формулы и действия только первая ступень.

Большинство задач сложнее и требуют применения дополнительных правил сложения и умножения.

Правило сложения.

Если некоторое элементарное действие А можно выполнить **m** способами, а второе действие В можно выполнить **n** способами, то действие «или А, или В» можно выполнить **m+n** способами. Это правило еще называют «ИЛИ – правило» для несовместных событий.

Как применять это правило?

Надо попробовать перефразировать условие или вопрос задачи так, чтобы можно было вставить союз «ИЛИ» так , чтобы при этом суть вопроса не изменилась, а стала даже понятней и если это получится, то результаты действий будут складываться.

Правило умножения.

Если некоторое элементарное действие А можно выполнить **m** способами, а затем выполнить второе действие В – **n** способами, то действие «сначала А, затем В» можно выполнить **m*n** способами. Это правило еще называют «И – правило» для независимых действий.

Как применять это правило?

Надо попробовать перефразировать условие или вопрос так, чтобы в текст задачи или в вопрос можно было вставить союзы «и», «а», или словосочетания «а затем», «после этого» так , чтобы при этом суть вопроса не изменилась , а стала даже понятней , и если это получится, то результаты действий будут умножаться.

Среди перечисленных ниже задач определите, где требуется найти

- перестановки,
- перестановки с повторениями,
- размещения,
- размещения с повторениями,
- сочетания,
- сочетания с повторениями

Задача 1. Курьер должен разнести пакеты в пять различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?

Задача 2. Сколькими способами можно обозначить вершины треугольника, используя буквы А,В,С,Д,Е

Задача 3. Сколькими способами можно составить флаг из четырёх горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов?

Задача 4. Сколько аккордов можно сыграть с помощью трёх клавиш из семи?

Задача 5. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, 2 ладьи, 2 слонов и 2 коней) на первой линии шахматной доски?

Задача 6. Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в общем случае равно общее число всех возможных комбинаций?

Задача 7. В почтовом отделении продаются 10 видов открыток. Сколькими способами можно купить 12 открыток для поздравления?

Задача 8. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слова ГОРА и ИНСТИТУТ?

Задача 9. В магазине игрушек имеются 7 одинаковых Чебурашек и 2 одинаковых Крокодила. Сколькими способами их можно расставить в один ряд на витрине?

Задача 10. Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: «красный», «желтый», «зеленый»?

Задача 11. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

Решение данных задач:

Задача 1. Курьер должен разнести пакеты в пять различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?

Решение:

Курьер разносит письма в разные учреждения, то есть в один и тот же не возвращается, таким образом, нет повторений. Он должен попасть во все 5 учреждений, то есть выбираются все объекты. По определению (смотри в схему анализа) это перестановка. Тогда используем формулу $P_n = n!$, значит $P_5 = 5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$

Ответ : 120 способов.

Задача 2. Сколькими способами можно обозначить вершины треугольника, используя буквы A,B,C,D,E.

Решение:

1 способ. Из геометрии мы знаем, что в обозначениях треугольников используются три разные буквы, а обозначения разных треугольников отличаются друг от друга хотя бы одной буквой. Итак, букв 5, а одновременно используются только 3, причем порядок расположения букв играет роль. Тогда по определению (смотри в схему анализа) это размещение без повторений:

Значит по формуле $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ имеем $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2} = 60$

Ответ: 60 способов

2 способ Для проверки верности решения воспользуемся методом перебора. Для обозначения первой вершины можно использовать любую из букв, значит имеем 5 разных способов обозначения первой вершины. А затем для обозначения

второй вершины можно использовать любую букву из оставшихся четырех букв , значит имеем 4 разных способа обозначить вторую вершину. После этого из оставшихся трех букв выберем любую для обозначения третьей вершины, а это 3 способа обозначить третью вершину. При анализе удалось для пояснения сути действия вставить словосочетания «А затем», «После этого», это означает ,что результаты действия надо умножить. Итак $5*4*3=60$.
 Ответ: 60 способов

Задача 3. Сколькими способами можно составить флаг из четырёх горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов?

Решение:

1 способ. Цветов всего 7, из них одновременно используются только 4. причем порядок расположения цветов играет роль, так как флаги отличаются друг от друга хотя бы одним цветом, а если их цвета одинаковые, то разным должно быть их расположение:

синий
красный
белый
зеленый

синий
белый
красный
зеленый

синий
зеленый
красный
белый

Таким образом, по определению(смотри в схему анализа) это размещение без повторений. Значит по формуле $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ имеем:

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7}{1*2*3} = 840.$$

Ответ: можно составить 840 разных флагов.

2 способ. Для проверки верности решения можно воспользоваться методом перебора , вкратце выглядит так: 7 способов выбора первого цвета ,а затем 6 способов выбора второго цвета ,после этого 5 способов выбора третьего цвета и наконец 4 способа выбора четвертого цвета .Так как используются словосочетания «а затем» , «после этого» ,то результаты действия надо умножить. Итак $7*6*5*4=840$

Ответ: можно составить 840 разных флагов

Задача 4. Сколько аккордов можно сыграть с помощью трёх клавиш из семи?

Решение:

Здесь нужно знать, что аккорды {до, ми, соль} и {до, соль, ми} это разные аккорды. То есть здесь важен порядок расположения. Причем из 7 нот одновременно используются только какие-то 3. Таким образом, это размещение без повторений по формуле $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ имеем: $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7}{1*2*3*4} = 210$

Ответ: 210 аккордов.

Для проверки верности решения также можно воспользоваться методом перебора.

Задача 5. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, 2 ладьи, 2 слонов и 2 коней) на первой линии шахматной доски?

Решение:

Сразу ясно, что здесь одновременно используются все 8 фигур и этот факт уже ясно дает понять, что речь идет о перестановках. Кроме того, места на первой линии шахматной доски имеют номера 1,2,3,4,5,6,7,8. Значит, фигуры будут каждый раз занимать разные места и будут повторения. Следовательно, речь идет о перестановках с повторениями. Итак, формула $P_n(k_1, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$. У нас повторения: 2 ладьи, 2 слона, 2 коня. Тогда:

$$P_8(2,2,2) = \frac{8!}{2!2!2!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8}{1*2*1*2*1*2} = 5040$$

Ответ: 5040 способов.

Задача 6. Шифр сейфа состоит из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в общем случае равно общее число всех возможных комбинаций?

Решение:

Итак, цифр всего 10, а используются из них только 6. Таким образом, это не перестановки. Значит это или сочетания, или размещения. А теперь обратим внимание на то, что тут важен порядок расположения цифр, причем цифры могут повторяться. Итак, речь идет о размещениях с повторениями. Формула размещения с повторениями: $A_n^k = n^k$.

Тогда $A_{10}^6 = 10^6$

Ответ: общее число всех комбинаций 10^6 .

Задача 7. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 12 открыток для поздравления?

Решение:

Тут надо приобрести открыток больше, чем количество имеющихся видов открыток. То есть неизбежны повторения. Кроме того, обратим внимание на то, что какого вида покупать открытки не имеет значения (по условию). То есть порядок выбора

видов не важен, значит, речь идет о сочетаниях с повторениями. Воспользуемся соответствующей формулой: $C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!k!}$,

тогда $C_{10}^{12} = \frac{(10+12-1)!}{(10-1)!12!} = \frac{21!}{9!12!} = 293930$

Ответ: 293930 способов.

Задача 8. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слова ГОРА и ИНСТИТУТ?(Смысл слов не имеет значения).

Решение:

Из условия уже ясно, что речь идет о перестановках.

Рассмотрим слово ГОРА. Букв 4, одинаковых букв нет, значит, речь пойдет о перестановках. Формула перестановок без повторения $P_n = n!$. Значит $P_4 = 4! = 1*2*3*4 = 24$ разных слов можно получить.

Рассмотрим слово ИНСТИТУТ. Здесь 8 букв, но буква И повторяется 2 раза, буква Т – 3 раза. Итак, это перестановка с повторениями. Формула перестановок с повторениями $P_n(k_1, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$, тогда $P_8(3,2) = \frac{8!}{3!2!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8}{1*2*1*2*3} = 3360$

разных слов можно получить.

Ответ: а) 24 способа; б) 3360 способов.

Задача 9. В магазине игрушек имеются 7 одинаковых Чебурашек и 2 одинаковых Крокодила. Сколькими способами их можно расставить в один ряд на витрине?

Решение:

обозначив игрушки первыми буквами названия, составим несколько комбинаций: КЧЧЧЧЧЧК, ЧЧЧКЧКЧЧЧ, ККЧЧЧЧЧЧЧ, ... Повторяются ли элементы в выборке? Да. Меняется ли состав? Нет, ведь каждая выборка состоит из семи

букв «Ч» и двух букв «К». Следовательно, это перестановки с повторениями: $P_9(2,7) = \frac{9!}{2!7!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$.

Ответ: 36 способами.

Задача 10. Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: «красный», «желтый», «зеленый»?

Решение:

Выпишем несколько комбинаций: КККЖЗЗ, ЗЗЗЗЗЗ, КЖЗКЖЗ... Мы видим, что состав выборки меняется и порядок элементов существен (ведь если, например, в выборке КЖЗКЖЗ поменять местами К и Ж, ситуация на дороге будет другой). Поэтому применяем формулу размещений с повторениями из 3 по 6: $\tilde{A}_3^6 = 3^6 = 729$.
Ответ: 729 комбинаций.

Задача 11. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?
Решение:

обозначая булки белого и черного хлеба буквами Б и Ч, составим несколько выборок: ББББББ, ББЧЧББ, ЧЧЧЧЧБ, ... Состав меняется от выборки к выборке, значит, это уже не перестановки; порядок элементов несуществен, это — сочетания с повторениями из 2 по 6:

$$\tilde{C}_2^6 = C_{2+6-1}^6 = C_7^6 = C_7^1 = 7$$

Сделаем проверку и выпишем все варианты покупки: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ, БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Их действительно 7. Ответ: 7 вариантов.

Глава 2. Решение задач на перестановки без повторений и с повторениями.

Задача 1. Сколькими способами можно составить список из 5 учеников?

Решение: В списке должны присутствовать все 5 учеников (используются одновременно все объекты) и только по одному разу, значит, речь идет о перестановке без повторений. Используем соответствующую формулу:

$$P_n = n!, \quad \text{тогда } P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Ответ: 120 способов.

Задача 2. Сколько различных слов можно составить из слова ВЕКТОР (смысл слов не имеет значения, буквы использовать только по одному разу).

Решение: В слове 6 букв, все они разные, и надо использовать все 6 букв (используются одновременно все объекты) причем только по одному разу, значит по определению, речь идет о перестановке без повторений. Используем соответствующую формулу $P_n = n!$, тогда $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Ответ: 720 слов.

Задача 3. Сколько различных слов можно составить из слова ЛИНИЯ (смысл слов не имеет значения, буквы использовать только по одному разу).

Решение: В слове 5 букв, но две из них И и И одинаковые, надо использовать все 5 букв, причем только по одному разу, значит по определению, речь идет о перестановке, но с повторениями. Формула для этого случая выглядит так:

$$P_{n(k \text{ повторениями})} = \frac{n!}{k!}, \quad \text{тогда} \quad P_{5(2 \text{ раза повторяется буква И})} = \frac{5!}{2!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2} = 60$$

Ответ: 60 слов.

Если повторяющихся элементов несколько, то формула выглядит так:

$$P_{(k,m,t)} = \frac{n!}{k!m!t!}, \quad \text{где один объект повторяется } k \text{ раз, другой} - m \text{ раз, а третий объект повторяется } t \text{ раз.}$$

Задача 4. Сколько различных слов можно составить из слова ПАРАБОЛА?

Решение: В слове 8 букв, но буква А повторяется 3 раза надо использовать все 8 букв, причем только по одному разу, значит по определению, речь идет о перестановке, но с повторениями. Формула для этого случая выглядит так:

$$P_{n(k \text{ повторениями})} = \frac{n!}{k!},$$

$$\text{тогда } P_{8(3 \text{ раза повторяется буква А})} = \frac{8!}{3!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8}{1*2*3} = 6720$$

Ответ: 6720 слов.

Задача 5. Сколько различных слов можно составить из слова БИСSEKТРИСА?

Решение: В слове 11 букв, но буква И повторяется 2 раза, буква С – 3 раза, надо использовать все 11 букв, причем только по одному разу, значит по определению, речь идет о перестановке, но с несколькими повторениями. Эта формула выглядит так:

$$P_{n(k \text{ и } m \text{ повторений})} = \frac{n!}{k!m!}, \quad \text{тогда } P_{11(2-И, 3-С)} = \frac{11!}{2!3!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11}{1*2*1*2*3} = 1663200$$

Ответ: 1663200 слов.

Задача 6. Сколько различных слов можно составить из слова МАТЕМАТИКА?

Решение: В слове 10 букв, но буква М повторяется 2 раза, буква А – 3 раза, буква Т – 2 раза, надо использовать все 10 букв, причем только по одному разу, значит по определению, речь идет о перестановке, но с несколькими повторениями.

$$\text{Эта формула выглядит так: } P_{n(k \text{ и } m \text{ повторений})} = \frac{n!}{k!m!},$$

$$\text{тогда } P_{10(2-М, 3-А, 2-Т)} = \frac{10!}{2!3!2!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10}{1*2*1*2*3*1*2} = 151200$$

Ответ: 151200 слов.

Задача 7. Имеются яблоко, банан и груша. Сколькими способами их можно разложить на столе?

Решение

1 способ: ясно, что речь идёт о простом перекладываний фруктов.

Значит, происходит перестановка объектов безо всяких повторений, тогда $P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$.

Ответ: 6 способов.

2 способ: Так как объектов немного, то можно решить и перебором

	1 место	2 место	3 место
1	Я	Б	Г
2	Я	Г	Б
3	Б	Я	Г
4	Б	Г	Я
5	Г	Я	Б
6	Г	Б	Я

Из таблицы видно, что получилось 6 способов .

Задача 8. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 5;6;7,если каждое число входит в изображение числа только 1 раз?

1 решение: Из условия ясно, что речь идёт о перестановках без повторений, поэтому

$$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$$

Ответ: 6 способов

2 решение: Так как объектов немного, то можно сделать перебор

	Сотни	Десятки	Единицы
1	5	6	7
2	5	7	6
3	6	7	5
4	6	5	7
5	7	6	5
6	7	5	6

Задача 9. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3, если каждая цифра входит в изображение только один раз?

1 решение: Из условия становится ясным, что речь идёт о перестановках без повторений, тогда

$P_4 = 4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$, но если число 0 окажется на первом месте, то есть в разряде тысяч, число станет трёхзначным. Значит надо из 24 способов выбросить комбинации, где число 0 окажется на первом месте. Так как объектов немного, то просто переберём такие варианты:

	тысячи	сотни	десятки	единицы
1	0	1	2	3
2	0	1	3	2
3	0	2	1	3
4	0	2	3	1
5	0	3	1	2
6	0	3	2	1

Таких вариантов оказалось 6. Значит, всего вариантов будет $24-6=18$.

Ответ: 18 чисел.

2 решение: Простым перебором, но с последующим анализом. Если в таблицу, в разряд тысяч, поставить число 1, и перебрать в следующих разрядах оставшиеся 3 цифры получится 6 различных чисел.

	тысячи	сотни	десятки	единицы
1	1	0	2	3
2	1	0	3	2
3	1	2	0	3
4	1	2	3	0
5	1	3	0	2
6	1	3	2	0

Затем в разряд тысяч поставить следующее число 2, появятся ещё 6 новых чисел и наконец, поставить в разряд тысяч третье число 3, появятся следующие 6 чисел. В общем $6+6+6=18$ чисел

Ответ: 18 чисел.

Задача 10. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколько может быть вариантов такой выдачи?

Решение: обозначая фрукты по первым буквам названия, составим несколько вариантов выдачи: ЯЯГГГАААА, ААГГЯГААЯ, ГГГААЯЯАА. Эти выборки имеют один и тот же состав и отличаются только перестановкой элементов,

поэтому применяем формулу числа перестановок с повторениями:

$$P_9(2,3,4) = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1260$$

Ответ: 1260 вариантов.

Задача 11. Сколькими способами можно рассадить 7 учеников в ряд из 7 стульев так, чтобы определенные три подруги сидели рядом?

Решение: Из условия задачи понятно, что это не будет перестановкой из 7 элементов, т.к. между тремя подругами нельзя никого ставить, т.е. если этих подруг обозначить ABC, то всегда должна быть одна из комбинаций.

ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA

То есть между собой они могут меняться местами, причем 6 разными способами как видно из переборки, но между ними никого не должно быть. Тогда для других участников они будут как одно целое. Обозначим целое буквой О. Значит, всех участников условно будет не 7 человек, а 5. Значит, перестановка будет из 5 объектов: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Итак, 120 разных перестановок, а затем внутри каждой перестановки 3 подруги могут меняться местами 6 способами. Если в текст задачи можно вставить словосочетание «а затем» то результаты действий нужно умножать. Значит, всего способов будет $120 \cdot 6 = 720$ способов. Если показать с помощью таблицы, то примерно так:

ABCDKMN	ACBDKMN
ABCDMKN	ACBDMKN
ABCDNKM	ACBDNKM
ABCKDMN	ACBKDMN
ABCKMDN	ACBKMDN
ABCKMND	ACBKMND

Глава 3. Решение более сложных примеров

В умении решать задачи по комбинаторике, выбор подходящей формулы только первая ступень. Большинство задач сложнее и требуют применения дополнительных правил сложения и умножения.

Правило сложения.

Если некоторое элементарное действие А можно выполнить m способами, а второе действие В можно выполнить n способами, то действие «или А, или В» можно выполнить $m+n$ способами. Это правило еще называют «ИЛИ – правило» для несовместных событий.

Как применять это правило?

Надо попробовать перефразировать условие или вопрос задачи так, чтобы можно было вставить союз «ИЛИ» так, чтобы при этом суть вопроса не изменилась. а стала даже понятней и если это получится, то результаты действий будут складываться.

Правило умножения.

Если некоторое элементарное действие А можно выполнить m способами, а затем выполнить второе действие В – n способами, то действие «сначала А, затем В» можно выполнить $m \cdot n$ способами. Это правило еще называют «И – правило» для независимых действий.

Как применять это правило?

Надо попробовать перефразировать условие или вопрос так, чтобы в текст задачи или в вопрос можно было вставить союзы «и», «а», или словосочетания «а затем», «после этого» так чтобы при этом суть вопроса не изменилась, а стала даже понятней, и если это получится, то результаты действий будут умножаться.

Переходим к решению примеров для иллюстрации правил.

Задача 1. Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Решение:

Попробую перефразировать вопрос: сколькими способами можно выбрать или двух юношей, или двух девушек. Получилось вставить союз «ИЛИ». Теперь стало ясно, что надо применить «ИЛИ – правило», т.е. результаты действий надо будет сложить.

Дальше надо разобраться, о каком действии идет речь: о сочетании, о размещении или о перестановках? Речь не идет о перестановках, потому что одновременно все 23 объекта не участвуют в выборке. Кроме того, не важен порядок выбора, т.е. нет указания типа, сначала А, потом В, значит речь идет о сочетании.

Здесь надо обратить внимание на то, что выбирать по 2 надо не из общего числа 23, а отдельно по 2 из группы девушек в 13 человек, и отдельно по 2 группы юношей в 10 человек. И, т.к. работает «ИЛИ – правило», то результаты действий потом надо будет сложить.

Итак.

$$C_{13}^2 = \frac{13!}{2! \cdot (13-2)!} = \frac{13!}{2! \cdot 11!} = 78 \text{ способов выбора девушек.}$$

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45 \text{ способов выбора юношей.}$$

Нам было необходимо выбрать или двух девушек или двух юношей, т.е. результаты действий надо сложить.

$78+45=123$ способа выбрать двух человек одного пола.

Ответ : 123 способа.

Задача 2. Группу из 20 человек нужно разделить на 3 бригады, причём в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую – 5 и в третью – 12. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Перефразирую условие задачи «... в первую бригаду отобрать 3 человека, затем во вторую 5 и после этого в третью 12 человек». Удалось вставить фразы «а затем», «после этого» значит, работает «И – правило» т.е результаты действий надо перемножить.

А какого действия? (сочетания, размещения, перестановки).

Ясно, что речи о перестановке нет, т.к. все 20 объектов не используются одновременно.

Кроме того тут не распределяются роли, должности, т.е. не указан порядок выборки, следовательно это не размещение.

Значит, речь идёт о сочетании.

$$\text{Итак, } C_{20}^3 = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140 \text{ способов выбрать первую бригаду из трех человек.}$$

После этого из оставшихся 17 человек выберем вторую бригаду

$$C_{17}^5 = \frac{17!}{5! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6188 \text{ способов.}$$

А теперь остаётся $20 - 3 - 5 = 12$ человек, они и образуют третью бригаду, т.е. тут не из чего выбирать всего 1 способ.

Итак, теперь умножаем результаты действий:

$$1140 \cdot 6188 \cdot 1 = 7.054.320 \text{ способов.}$$

Задача 3. В урне находится 10 белых и 7 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны 5 шаров, из которых белыми будут 3 штуки?

Решение:

Перефразирую вопрос. Надо выбрать шары так, чтобы было 3 белых и 2 черных шара. В текст вопроса удалось вставить союз «и», то есть работает «И- правило» Результаты действий надо умножать. Далее надо разобраться, о каком действии идет речь: о сочетании, о размещении или о перестановках?

Читаю вопрос : Сколькими способами из 10 белых шаров можно выбрать 3 штуки. Так как не сказано, что надо сначала вытащить шар №1, затем №2 и т.д. то это не размещение, так же не используются все шары одновременно, значит это и не перестановка, получается, что это сочетание.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ способов}$$

Сколькими способами из 7 черных можно выбрать 2 штуки

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21 \text{ способ}$$

Т.к. в условии сказано «...белых и черных», то результаты действия умножаются:

$$C_{10}^3 * C_7^2 = 120 * 21 = 2520 \text{ способов}$$

Задача 4. Выпуклый многоугольник имеет 90 диагоналей. Сколько у него сторон?

Решение:

Обозначим количество сторон многоугольника через n , вершин у него тоже будет n . Соединим вершины попарно отрезками, в каком порядке соединять вершины не имеет значения, поэтому это не размещение. Кроме того одновременно не используются все n элементов, значит это и не перестановки. Итак речь идет о сочетании из n элементов по два, которых будет $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!}$. Среди этих отрезков будет n сторон, остальные отрезки будут диагоналями. Составим уравнение

по условию задачи: $\frac{n!}{(n-2)!} = 90 + n$; $\frac{(n-1) \cdot n}{2} = 90 + n$ $(n-1) \cdot n = 2(90 + n)$ Отсюда получается квадратное

уравнение: $n^2 - 3n - 180 = 0$, корни которого $n_1 = 15$, $n_2 = -12$. По смыслу задачи число сторон n не может быть отрицательным, значит $n = 15$.

Ответ: 15 сторон.

Задача 5. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый участник сыграл с каждым по одной партии, а партий было сыграно в 10 раз больше числа участников?

Решение:

При игре в шахматы партия Иванов – Петров и Петров – Иванов означает одну и ту же партию, то есть порядок фамилии не важен, значит это не размещение а сочетание из n элементов по два. Итак если участников — n человек, партий будет сыграно C_n^2 штук. Составим уравнение: $C_n^2 = 10n$, решив которое, найдем: $n = 21$.

Ответ: 21 шахматист.

Задача 6. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет так, чтобы в нем было 2 розы и 3 георгина. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Выберем сначала из 10 роз 2 розы. Это можно осуществить C_{10}^2 способами. Мы используем сочетания, а не размещения, потому что порядок, в котором выбираются цветы, значения не имеет. А затем независимо от выбора роз, 3 георгина из 8 можно взять C_8^3 способами. Удалось вставить фразу «а затем», тогда, по правилу произведения, 2 розы и 3 георгина можно выбрать $C_{10}^2 \cdot C_8^3$ способами:

$$C_{10}^2 \cdot C_8^3 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2520.$$

Ответ: 2520 способами.

Задача 7. Сколькими способами можно расставить 8 томов энциклопедии на книжной полке так, чтобы первый и второй тома:

- а) стояли рядом;
- б) не стояли рядом?

Решение:

Тут без раздумий понятно, что речь идет о перестановках.

а) Подсчитаем сначала число вариантов перестановки, когда первый и второй тома стоят рядом. Их можно считать за одну книгу. Тогда получается $P_7 = 7!$ перестановок. Но первый и второй тома можно соединить двумя способами: слева первый, справа второй том и наоборот. За счет этого количество вариантов удваивается и всего их будет $2 \cdot 7! = 10080$.

б) Указанные тома не стоят рядом во всех остальных случаях, значит, из общего числа перестановок восьми книг $8!$ надо вычесть число перестановок 10080 , когда тома стоят рядом.

Итак, $8! - 10080 = 30240$.

Ответ: а) 10080; б) 30240.

Задача 8. В ювелирную мастерскую привезли 6 одинаковых изумрудов, 9 одинаковых алмазов и 7 одинаковых сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором должно быть 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

Решение:

Итак по условию понятно, что это не перестановки, потому что выбираются не все множество элементов одновременно, и не размещения так как камни не нумерованы и какой из 6 изумрудов взять, не имеет значения.

Значит, из 6 изумрудов 3 он может выбрать $C^3_6 = 20$ способами, а затем из 9 алмазов 5 - $C^5_9 = 126$ способами, и после этого из 7 сапфиров 2 - $C^2_7 = 21$ способом. Удалось вставить фразу «а затем», тогда по правилу умножения находим число вариантов $20 \times 126 \times 21 = 52920$ способов.

Задача 9. На выборах победили 9 человек – Сафонов, Николаев, Петров, Кулаков, Мишин, Гусев, Володин, Афонин, Титов. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$A^3_9 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 504 \text{ способа.}$$

Здесь речь идет о размещениях, потому что раздаются должности, тогда

Можно было решать по-другому.

Сначала на должность председателя выбираем одного из 9 человек, то есть 9 способами, а затем на должность заместителя второго из оставшихся 8 человек, 8 способами, после этого третьего на должность профорга из оставшихся 7 человек, 7 способами. Удалось вставить фразу «а затем», значит результаты действия надо перемножить. По правилу умножения получаем $9 \times 8 \times 7 = 504$

Ответ: 504

Задача 10. В районе построили новую школу. Из пришедших 25 человек нужно выбрать директора школы, завуча начальной школы, завуча среднего звена и завуча по воспитательной работе. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

На должность директора выбираем одного из 25 человек, а затем на завуча начальной - из 24, после этого завуча среднего звена - из 23, завуча по воспитательной работе из 22. По правилу умножения получаем:

$$25 \times 24 \times 23 \times 22 = 303600$$

Или, раз распределяются должности, то имеем дело с размещением, поэтому зная формулу размещения, получаем

$$A^4_{25} = \frac{25!}{(25-4)!} = \frac{25!}{21!} = 303600$$

Ответ: 303600

Задача 11. В студенческом общежитии в одной комнате живут трое студентов Петя, Вася и Коля. У них есть 6 чашек, 8 блюдец и 10 чайных ложек (все принадлежности отличаются друг от друга). Сколькими способами ребята могут накрыть стол для чаепития (так, что каждый получит чашку, блюдце и ложку)?

Решение :

1 способ:

Пусть первым начнет выбирать приборы Петя. Тогда он 6 способами может выбрать себе чашку, затем 8 способами может выбрать блюдце и после этого 10 способами выбрать ложку. По выделенным словосочетаниям понятно, что результаты действия Пети нужно перемножить. Для Пети набор можно выбрать $6 \times 8 \times 10 = 480$ способами

После этого Вася 5 способами может выбрать себе чашку, затем 7 способами может выбрать блюдце, а потом 9 способами выбрать ложку. По выделенным словосочетаниям понятно, что результаты действия Васи нужно перемножить. Для Васи набор можно выбрать $5 \times 7 \times 9 = 315$ способами.

Затем Коля 4 способами может выбрать себе чашку, после этого 6 способами может выбрать блюдце, а потом 8 способами выбрать ложку. По выделенным словосочетаниям понятно, что результаты действия Коли нужно перемножить. Для Коли набор можно выбрать $4 \times 6 \times 8 = 192$ способами.

А теперь обратим внимание на то, как связывались между собой действия мальчиков. Словосочетаниями « После этого ... » « Затем ... » Если попытаться вставить союз ИЛИ вместо этих словосочетаний, то смысл задачи вообще искажается.. Значит, результаты их действий также надо умножить между собой.

$480 \times 315 \times 192 = 29030400$ способами.

2 способ:

Эту же задачу можно решить по формулам комбинаторики. Так как чашки, блюдца и ложки не нумерованы, то порядок их расположения не играет роли и мы имеем дело с сочетанием без повторений. Пусть первым начнет выбирать приборы Петя. Тогда он $C_6^1 = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$ способами выберет чашку, затем $C_8^1 = \frac{8!}{(8-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 8$ способами выберет блюдце и после этого $C_{10}^1 = \frac{10!}{(10-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 10$ способами выберет ложку. По выделенным словосочетаниям понятно, что результаты действия Пети нужно перемножить. Для Пети набор можно выбрать $6 \times 8 \times 10 = 480$ способами. Теперь продолжим. После этого точно так же можно посчитать используя формулу сочетаний сколькими способами могут выбрать наборы Вася и Коля и опираясь на использованные словосочетания после этого Вася, а затем Коля результаты действия студентов надо перемножить.

Глава 4. Решение задач по теории вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема 1.

Вероятность суммы двух **несовместимых событий**, равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Примеры **несовместных действий**, которые не могут произойти при одном и том же испытании:

- Попадание в цель и промах при одном выстреле
- Выпадение и орла, и решки при однократном бросании монеты
- Вынуть и стандартную, и нестандартную деталь при одной выемке
- Лампа или сгорит, или не сгорит и т.д.

Теорема 2.

Вероятность суммы **совместных** событий вычисляется по формулам:

Для двух событий: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A*B)$

Для трех событий: $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) + P(A*B*C) - P(A*B) - P(A*C) - P(B*C)$

Примеры **совместных действий**, то есть таких действий, когда появление одного из них не исключает появления другого.

- Одновременное попадание в цель двумя стрелками
- Выпадение одинакового количества очков при бросании двух кубиков
- Одна лампа перегорела, а другая нет и т.д.

Теорема 3.

Вероятность произведения двух **зависимых** событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что уже произошло первое событие.

$$P(A*B) = P(A) * P_A(B) \quad \text{или} \quad P(A*B) = P(B) * P_B(A),$$

где $* P_A(B)$ и $P_B(A)$ – условные вероятности.

Примеры **зависимых событий**, это когда из урны вынимают 1 шар и не возвращают обратно. Тогда второй шар будет вытаскиваться из количества шаров на 1 меньше, чем когда вытаскивали 1 шар и эта вторая вероятность обозначается $P_A(B)$ и $P_B(A)$ – условные вероятности, вычисленные при условии, что уже произошло первое событие, то есть количество исходных элементов уменьшилось.

Теорема 4.

Если же события A и B **независимы**, то $P(A*B) = P(A) * P(B)$.

Полной группой событий называются несколько событий, из которых хотя бы одно обязательно появится при проведении испытания.

Два события, образующие полную группу называют **противоположными**, т.е. при эксперименте обязательно произойдет одно из них, например :

- Выпадет или орел, или решка, при однократном бросании монеты.
- Пуля или попадет в цель, или не попадет в цель.

Если действие обозначить за A , то противоположное действие обозначает $\bar{A}$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ тогда } P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

А если событий несколько A, B, C, D, M, N , то и противоположных событий будет столько же $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{M}, \bar{N}$.

В жизни, в производстве часто возникают такие ситуации, когда нужно вычислить вероятность появления хотя бы одного события из некоторого набора возможных событий (произошло **хотя бы одно попадание** при залпе по мишени, **хотя бы одна лампа перегорела** и т.д.), Для таких ситуации действует:

Особая теорема 5.

Вероятность появления хотя бы одного из событий A, B, C, D, M, N равна разности между единицей и вероятностью совместного появления **противоположных событий** $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{M}, \bar{N}$:

$$P(A+B+C+D+M+N) = 1 - P(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{M}, \bar{N})$$

Также как и в комбинаторике в теории вероятностей работают как «**ИЛИ – правило**» так и «**И – правило**»

Правило сложения.

Если некоторое элементарное действие A можно выполнить m способами, а второе действие B можно выполнить n способами, то действие «или A , или B » можно выполнить $m+n$ способами. Это правило еще называют «ИЛИ – правило» для несовместных событий.

Как применять это правило?

Надо попробовать перефразировать условие или вопрос задачи так, чтобы можно было вставить союз «**ИЛИ**» так , чтобы при этом суть вопроса не изменилась . а стала даже понятней и если это получится, то результаты действий будут складываться.

Правило умножения.

Если некоторое элементарное действие A можно выполнить m способами, а затем выполнить второе действие B – n способами, то действие «сначала A , затем B » можно выполнить $m*n$ способами. Это правило еще называют «И – правило» для независимых действий.

Как применять это правило?

Надо попробовать перефразировать условие или вопрос так, чтобы в текст задачи или в вопрос можно было вставить союзы «и», «а», или словосочетания «а затем», «после этого» так чтобы при этом суть вопроса не изменилась, а стала даже понятней, и если это получится, то результаты действий будут умножаться.

Задача 1. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение:

Анализируя условие задачи, обратим внимание на фразу «хотя бы одна лампа не перегорит» и становится ясным, что надо применить особую теорему №5.

Только надо разобраться, что принять за само событие и что за противоположное событие.

Для этого читаем ещё раз часть вопроса “хотя бы одна лампа не перегорит”.

Итак, событие – не перегорит лампа.

Значит противоположное событие – перегорит лампа.

Тогда по особой теореме №5.

$P(\text{хотя бы 1 лампа не перегорит}) = 1 - P(\text{перегорит 1 лампа} * \text{перегорит 2 лампа})$

По условию задачи вероятность перегорания двух ламп одинаковая и равна 0,3, тогда имеем

$P(\text{хотя бы одна лампа не перегорит}) = 1 - 0,3 * 0,3 = 1 - 0,09 = 0,91$

Ответ: 0,91.

Задача 2. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в неё в начале стрельбы 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что охотник попал в цель хотя бы один раз.

Решение:

Анализируем условие задачи, и обращаем внимание на то, что в вопросе звучит словосочетание «хотя бы один раз попал в цель».

Итак, разобрались, что будет работать особая теорема №5, и надо выяснить, что принять за событие, а что считать противоположным событием.

Для этого вчитываемся в словосочетание из вопроса «охотник попал в цель хотя бы один раз».

Итак, событие это **попал** в цель, тогда противоположное событие «**не попал в цель**».

Значит по особой теореме №5, имеем

$P(\text{попал хотя бы один раз}) = 1 - P(\text{не попал в первый раз} * \text{не попал во второй раз} * \text{не попал в третий раз})$.

Но по условию задачи нам даны только вероятности попадания: 1 раз = 0,8, 2 раз = 0,7 (на 0,1 меньше, чем в 1 раз), 3 раз = 0,6 (на 0,1 меньше, чем во 2 раз).

А нам ещё нужны противоположные вероятности – вероятности непопадания, которые высчитываются по формуле:

$$P(\tilde{A}) = 1 - P(A)$$

Тогда вероятность того, что не попал в 1 раз равна $1 - 0,8 = 0,2$, вероятность того, что не попал во 2 раз равна $1 - 0,7 = 0,3$ и вероятность того, что не попал в 3 раз равна $1 - 0,6 = 0,4$.

Теперь по особой формуле №5 получим $P(\text{попал хотя бы 1 раз}) = 1 - (0,2 * 0,3 * 0,4) = 1 - 0,024 = 0,976$

Ответ: 0,976

Задача 3: Монета подброшена дважды. Какова вероятность того что она по меньшей мере один раз выпадет гербовой стороной?

Решение:

Здесь на интуиции понимаем, что словосочетание «по меньшей мере, один раз», легко заменить другим словосочетанием «хотя бы один раз», и тогда имеем ситуацию, когда нужно применить особую теорему №5.

Теперь выясняем, что же является событием, а что противоположным событием. Вчитываемся в вопрос «... по меньшей мере, один раз выпадет гербовой стороной».

Ясно, что событие это **выпадение гербовой стороны** монеты, а противоположное событие – **выпадение «числовой» стороны** монеты.

Мы знаем, что при бросании монеты происходят 2 равновозможных события, т.е. события, имеющие одинаковую вероятность: выпала гербовая сторона – вероятность $\frac{1}{2}$, или выпала «числовая» сторона – вероятность тоже $\frac{1}{2}$.

Тогда по особой теореме №5 имеем

$P(\text{хотя бы один раз выпал гербовой стороной}) = 1 - P(\text{выпала числовая сторона} * \text{выпала числовая сторона}).$

Итак, $P(\text{хотя бы один раз выпал гербовой стороной}) = 1 - \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Задача 4. Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается, что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности их соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7.

Какова вероятность того, что:

- а) все три выстрела окажутся успешными?
- б) хотя бы один выстрел успешный?
- в) только один выстрел окажется успешным?

Решение.

Сначала высчитаем вероятности противоположных действий, а потом будем разбирать отдельно все три ситуации.

Событие А – первый стрелок попал в мишень, по условию $P(A) = 0,9$, тогда вероятность противоположного события, первый стрелок не попал в цель $P(\bar{A}) = 1 - 0,9 = 0,1$

Событие В – второй стрелок попал в мишень по условию $P(B) = 0,8$, тогда вероятность противоположного события, второй стрелок не попал в цель $P(\bar{B}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Событие С – третий стрелок попал в мишень по условию $P(C) = 0,7$, тогда вероятность противоположного события, третий стрелок не попал в цель $P(\bar{C}) = 1 - 0,7 = 0,3$

а) Какова вероятность того, что все три выстрела оказались успешными. Попробую перефразировать вопрос: «Какова вероятность того, что в цель попали **и** первый **и** второй **и** третий стрелок?» Удалось вставить в текст вопроса союз «**И**» не изменяя сути вопроса, а лишь уточняя смысл. Значит работает «**И - правило**», то есть надо производить действие умножения.

$P(\text{все три выстрела успешны}) = 0,9 * 0,8 * 0,7 = 0,504$

б) Какова вероятность того, что хотя бы один из выстрелов окажется успешным?

Анализируем условие задачи, и обращаем внимание на то, что в вопросе звучит словосочетание «хотя бы один из выстрелов окажется успешным».

Итак, будет работать особая теорема №5, и надо выяснить, что принять за событие, а что считать противоположным событием. Из текста вопроса ясно, что событие это попадание в цель, тогда противоположное событие не попал в цель.

У нас уже все вероятности сосчитаны в начале задачи. По особой теореме №5 получаем

$P(\text{хотя бы один из выстрелов окажется успешным}) = 1 - P(\text{не попал в цель 1-ый} * \text{не попал в цель 2-ой} * \text{не попал в цель 3-ий})$ и тогда $P(\text{хотя бы один из выстрелов окажется успешным}) = 1 - P(0,1 * 0,2 * 0,3) = 1 - 0,006 = 0,994$

в) Какова вероятность того, что один выстрел оказался успешным, два – неуспешными?

Надо разобрать три случая:

1 стрелок попал в цель, а второй и третий не попали в цель. Союз **а** указывает на то, что надо производить действие умножения:

$P(\text{первый выстрел оказался успешным, другие два неуспешными}) = P(A * \bar{B} * \bar{C}) = 0,9 * 0,2 * 0,3 = 0,054$

ИЛИ вторая ситуация :

$P(\text{второй выстрел оказался успешным, другие два неуспешными}) = P(\bar{A} * B * \bar{C}) = 0,1 * 0,8 * 0,3 = 0,024$

ИЛИ третья ситуация

$P(\text{третий выстрел оказался успешным, другие два неуспешными}) = P(\bar{A} * \bar{B} * C) = 0,1 * 0,2 * 0,7 = 0,014$

Обратим внимание на то, что эти три действия связаны союзом **ИЛИ**, значит работает «ИЛИ - правило», то есть результаты действия надо сложить:

$$0,054 + 0,024 + 0,014 = 0,092.$$

Ответ: 0,504 ; 0,994 ; 0,092.

Задача 5. Вероятность попадания в некоторую цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, при стрельбе из другого орудия – 0,7. Найти вероятность поражения цели при одновременном выстреле обоих орудий. Цель будет поражена, если будет хотя бы одно попадание из какого-либо орудия.

Решение.

В задаче речь идет и о попадании в цель и о не попадании в цель. Сначала высчитаем вероятности противоположных действий

Событие **A** – первое орудие попало в цель, по условию $P(A) = 0,8$, тогда вероятность противоположного события, первое орудие не попало в цель $P(\bar{A}) = 1 - 0,8 = 0,2$

Событие **B** – второе орудие попало в цель по условию $P(B) = 0,7$, тогда вероятность противоположного события, второе орудие не попало в цель $P(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Так как мы уже прорешали достаточное количество задач, попробуем решить эту задачу двумя способами.

1 способ.

Мы уже знаем из вышеизложенного, что одновременное попадание в цель двумя стрелками или одновременное не попадание в цель, или попадание одного стрелка и не попадание второго стрелка являются **совместными событиями**, то есть появление одного не исключает возможность появления другого события. Значит можно использовать **формулу сложения совместных событий**

Вероятность суммы совместных событий для двух событий вычисляется по формулам:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A*B).$$

Итак считаем: $P(\text{цель будет поражена}) = 0,8 + 0,7 - 0,8*0,7 = 0,94$

2 способ.

Обратим внимание на формулировку вопроса «...если будет хотя бы одно попадание из какого-либо орудия.». И становится ясным, что можно применить особую теорему №5. Причем у нас с самого начала уже четко разведены события и противоположные события и высчитаны их вероятности, тогда имеем

$$P(\text{попал хотя бы один раз}) = 1 - P(\text{не попало первое орудие} * \text{не попало второе орудие}).$$

$$P(\text{попал хотя бы один раз}) = 1 - 0,2 * 0,3 = 1 - 0,06 = 0,94.$$

Ответ : 0,94.

Задача 6. Вероятность того, что взятое наугад изделие фабрики является пригодным (событие A) , равна $\frac{92}{100} = 92\% = 0,92$. Вероятность того, что взятое наугад годное изделие (событие B) является изделием первого сорта равна $\frac{72}{100} = 72\% = 0,72$. Какова вероятность того, что взятое наугад изделие фабрики является изделием первого сорта ?

Решение :

Из условия задачи ясно, что есть пригодные изделия и бракованные изделия , кроме того часть изделий первого сорта, а есть изделия и других сортов. **Перефразируем вопрос:** какова вероятность того, что взятое наугад изделие является годным И оно же является изделием первого сорта? Удалось вставить союз «и» для **уточнения смысла вопроса**, значит, для данных вероятностей используется действие умножения:

$$P(A * B) = 0,92 * 0,72 = 0,6624.$$

Ответ: 0,6624

Задача 7. На пяти одинаковых карточках написаны буквы О, П, Р, С, Т. Найти вероятность того , что из наудачу вынутых по одной и расположенных в одну линию карточек, получается слово СПОРТ.

Решение:

Перефразируем условие задачи: вынимаю одну карточку, а затем вторую, а затем третью. Удалось вставить словосочетание «а затем», это означает, что результаты действий надо умножить (событие 2 зависит от события 1 , поэтому используется условная вероятность). А что за действия? Действия в данном случае это нахождение вероятности появления каждой буквы слова СПОРТ.

Объяснение: Чтобы получилось слово СПОРТ все события (выбор букв) должны произойти последовательно : изначально у нас карточек 5 - (С) (П) (О) (Р) (Т) . Значит вероятность первым вытащить букву С равна $P (C) = \frac{1}{5}$. **После этого**, (если использовали словосочетание **После этого , то результаты действия потом надо умножать**) при благоприятном исходе с буквой С , вторым надо вытащить букву П из оставшихся 4-ех карточек ,значит $P (П) = \frac{1}{4}$, аналогично $P(О) = \frac{1}{3}$; $P(Р) = \frac{1}{2}$ и $P(Т) = \frac{1}{1} = 1$. И тогда общая вероятность

$$P(СПОРТ) = \frac{1}{5} * \frac{1}{4} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * \frac{1}{1} = \frac{1}{120}$$

Ответ: вероятность появления слова СПОРТ равна $\frac{1}{120}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работая над понятием комбинаторных задач, ставилась цель более глубокого изучения этой темы, систематизации знаний. На мой взгляд, комбинаторика – это «красивый» и «изящный» раздел математики, в котором рассматриваются задачи, требующие для своего решения умения проявить догадку, математическое остроумие и некоторое умственное напряжение. В процессе их решения развиваются аналитические, комбинаторные способности и математическое воображение.

Диапазон их применения необъятен: от азартных игр до экономических законов, от движения молекул до социологических опросов. Были рассмотрены наиболее часто встречающиеся методы решения комбинаторных задач. Практическая значимость полученных знаний в области комбинаторики нужна не только в математике, но и в жизни. Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр или иных объектов. Руководителю необходимо распределить несколько видов работ между подчиненными, диспетчеру школы – составить расписание уроков, ученому-химику — рассмотреть возможные связи между атомами и молекулами, филологу – провести анализ текста или изучить различные варианты сочетаний букв иностранного языка и т.д.

В последнее время комбинаторика активно развивается, она тесно связана с проблемами дискретной математики, линейного программирования, статистики. Комбинаторным задачам присущ тот «интригующий момент», который неизменно вызывает у пытливой личности повышенный интерес и возбуждает желание попробовать свои силы в решении их.